GRČKA SLOVA KAO POKAZETELJI RIZIKA PRILIKOM TRGOVANJA OPCIJAMA

GREEK LETTERS AS RISK INDICATORS WHEN TRADING THE OPTIONS

Mr Vesna Prorok
Ekonomski fakultet Pale, Univerzitet u Istočnom Sarajevu
vesna.prorok@gmail.com

Mr Slađana Paunović
Ekonomski fakultet Pale, Univerzitet u Istočnom Sarajevu
sladjanapaunovic11@gmail.com

APSTRAKT

Slobodno se može reći da je drugu polovinu dvadesetog vijeka na finansijskim tržištima obilježila pojava *Black-Scholes*-ove parcijalne diferencijalne jednačine za vrednovanje finansijskih derivata. Tako naizgled jednostavna jednačina naglo je promijenila istoriju finansijskih tržišta i doprinijela snažnom razvoju kako tržišta opcija tako i tržišta ostalih finansijskih instrumenata. Shodno tome, vremenom su se razvile i osnovne mjere osjetljivosti cijena opcija u odnosu na promjene vrijednosti veličina koje utiči na njihovu cijenu. Ove mjere osjetljivosti u literaturi su poznati pod nazivom "Grci", pošto se obilježavaju slovima grčkog alfabeta, a njihova značajnost ogleda se u tome što se aktivno koriste prilikom formiranja strategija zaštite od rizika. U radu je pojedinačno obrađena svaka od mjera rizika uz korišćenje simulacije u programskom paketu MATLAB, te prikazan način kako investitor može obezbijediti zaštitu svog portfolija sačinjenog od opcija.

Ključne riječi: *Black-Scholes*-ov model, mjere osjetljivosti cijene opcije, grčka slova, strategije zaštite

ABSTRACT

It can be said that the second half of the twentieth century in the financial markets was marked by the appearance of the Black-Scholes partial differential equation for the valuation of financial derivatives. That seemingly simple equation abruptly changed the history of financial markets and contributed to the strong growth of both option markets and other financial derivative markets. Consequently, over time, there have been developed the basic measures of option price sensitivity relative to changes in the value of parameters affecting their price. These sensitivity measures in the literature are known as the "Greeks", as they are marked up with the letters of the Greek alphabet, and their importance is reflected in the fact that they are often used to help forming hedging strategies. In the paper, each measure of risk is individually processed with the use of simulation in MATLAB, and showed how investors can ensure the protection of their portfolio consisting of options.

Key words: Black-Scholes model, measures of option price sensitivity, greek letters, hedging strategies

UVOD

Jedan od najvažnijih rezultata na polju finansijske nauke jeste pojava modela za vrednovanje finansijskih derivata koji su prvi put 1973. godine predstavili *Fischer Black* i *Myron Scholes* u svom radu *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Tačna matematička formulacija modela kojim se upjelo postići zatvoreno analitičko rješenje za vrednovanje opcija donijela je potpuni preokret u načinu vrednovanja svih finansijskih instrumenata. Iako se zasnivao na određenom broju nerealnih pretpostavki, model je ipak doprinio snažnom razvoju finanijskih tržišta i postavio osnovu za dalja istraživanja na polju vrednovanja opcija. Stoga postoji potreba da se u finansijskoj literaturi poseban značaj posveti izučavanju samog modela, njegovim karakteristima i pretpostavkama na kojim se zasniva.

Black-Scholes-ov model prati eksplicitno sljedeće pretpostavke [Black and Scholes, 1973]:
- nepostojanje mogućnosti arbitraže na tržištu,
- postoji jedna kamatna stopa koja je bezrizična i po kojoj se mogu pozajmljivati neograničene količine novca i u najjednostavnijem slučaju ona je konstantna veličina,
- nema transakcionih troškova,
- osnovna aktiva (akcija) ne obezbjeđuje isplatu dividende za vrijeme trajanja opcije,

- trgovina hartijama od vrijednosti odvija se u kontinuiranom vremenu,
- polazi se od pretpostavke da se radi o opcijama evropskog tipa,
- cijena akcije prati geometrijsko *Brown*-ovo kretanje sa konstantnim driftom i volatilnošću i ima lognormalnu raspodjelu.

Prvobitni *Black*-*Scholes*-ov model dao je dvije formule za vrednovanje opcija: jedna za utvrđivanje cijene evropske *call* opcije, a druga za utvrđivanje cijene evropske *put* opcije.

$$C(t,S)=S_t N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{1.1}$$

$$P(t,S)=Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)-S_t N(-d_1) \tag{1.2}$$

gdje je

$$d_1=\frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2=\frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

S_t – cijena akcije u trenutku t
K – cijena izvršenja
σ – volatilnost cijene vezane imovine (akcije)
r – bezrizična kamatna stopa
T - t – vrijeme do dospijeća opcije.

Funkcija $N(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$ je kumulativna funkcija distribucije za standardizovanu normalnu raspodjelu.

$S_tN(d_1)$ je vrijednost aktive (akcije) u trenutku *t*, a $Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ je sadašnja vrijednost cijene izvršenja, pod uslovom da je opcija izvršena.

Postojanje analitičkog rješenja za cijenu evropske opcije omogućava nam da analiziramo kako se cijena opcije mijenja kao rezultat promjene nekog od rizičnih faktora (cijene vezane imovine, volatilnosti itd.). Ovakva analiza je korisna iz razloga što promjena cijene opcije takođe vodi i promjeni rizika same opcije. Prirodni indikatori osjetljivosti cijene opcije su parcijalni izvodi po svakom od rizičnih faktora koji se u literaturi obilježavaju grčkim slovima i poznati su pod nazivom Grci (*the Greeks*).

Uz izuzetak vega (koje nije grčko slovo), svaka mjera rizika je predstavljena drugačijim slovom grčkog alfabeta.

DELTA

Delta opcije se definiše kao promjena cijene opcije prouzrokovana promjenom cijene vezane imovine:

$$\Delta=\partial_s f=\frac{\partial f}{\partial S_t}$$

gdje je *f* cijena opcije, a S_t cijena vezane imovine.

Prije nego što izračunamo vrijednost *delta* potrebno je pronaći sljedeće parcijalne izvode: $\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}$ i $\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}$.

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(d_1-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot e^{d_1\sigma\sqrt{T-t}}\cdot e^{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot e^{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\cdot e^{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot\frac{S_t}{K}\cdot e^{r(T-t)} \tag{2.2}$$

Za evropsku *call* opciju vrijednost *delta* je:

$$\Delta_C=\frac{\partial C_t}{\partial S_t}=N(d_1)+S_t\frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t}-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial S_t}$$

$$=N(d_1)+S_t\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S_t}-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial S_t}$$

$$=N(d_1)+S_t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}-Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{S_t}{K}e^{r(T-t)}\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$=N(d_1)+S_t\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}-S_t\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}=N(d_1) \tag{2.3}$$

Vrijednost *delta* za *call* opciju kreće se u intervalu:
$0<\Delta_C<1$
Delta će težiti ili biti jednaka jedinici ako je opcija duboko u novcu (*in the money*), dok će, s druge strane, zauzimati vrijednost nula, kada se opcija nalazi daleko izvan novca (*out of the money*).

Analogno, dobijamo vrijednost *delta* za evropsku *put* opciju:

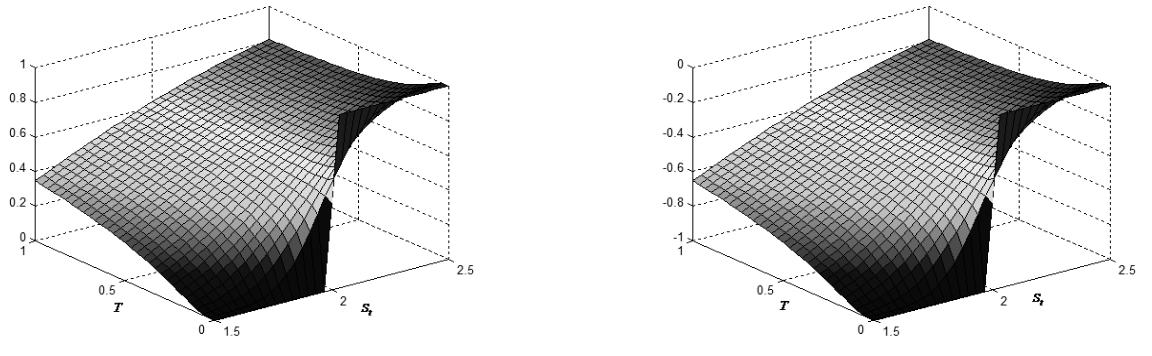
$$\Delta_P=\frac{\partial P_t}{\partial S_t}=Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(-d_2)}{\partial S_t}-N(-d_1)-S_t\frac{\partial N(-d_1)}{\partial S_t}$$

$$=Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial(1-N(d_2))}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial S_t}-(1-N(d_1))-S_t\frac{\partial(1-N(d_1))}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S_t}$$

$$=-Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{S_t}{K}e^{r(T-t)}\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}-(1-N(d_1))+S_t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$=-S_t\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}+N(d_1)-1+S_t\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}=N(d_1)-1 \tag{2.4}$$

Za *put* opciju *delta* ća se kretati u intervalu:
$-1<\Delta_p<0$
U slučaju *put* opcije *delta* će težiti ili zauzimati vrijednost -1 ako je opcija duboko u novcu (*in the money*), odnosno njena vrijednost biće jednaka nula kada je opcija daleko izvan novca (*out of the money*).



a) *b*)

Grafik 1: Delta evropske *a*) *call* i *b*) *put* opcije zasnovana na *Black-Scholes*-ovom modelu kao funkcija cijene vezane imovine i roka dospijeća. Parametri su: izvršna cijena ***K* = 2**, volatilnost ***σ* = 0,4** i kamatna stopa ***r* = 0,05**.

Delta strategija zaštite

Posjedovanje portfolija koji sadrži opciju na neku vezanu imovina (akciju), nosi u sebi i određeni nivo rizika. Tačnije, sama opcije izložena je riziku promjene cijene kao funkcije vremena i funkcije cijene vezane imovine (akcije). Strategija zaštite od rizika podrazumijeva smanjivanje izloženosti riziku ili njegovo potpuno eliminisanje. U okviru *delta* strategiji zaštite, investitor koji posjeduje opciju nastojaće da smanji rizik portfolija prouzrokovan promjenom cijene vezane imovine. Zaštitu od rizika, za male promjene u cijeni, može postići zauzimanjem duge ili kratke pozicije na vezanu imovinu. Izbor duge ili kratke pozicije zavisiće prvenstveno od toga kakvu poziciju zauzima na *call* ili *put* opciju. Kada su promjene u cijeni vezane imovine veće, *delta* strategija zaštite postaje mnogo kompleksnija.

Razmotrimo slučaj da investitor prodaje *call* opciju na neku rizičnu aktivu (akciju) i u isto vrijeme investira u direktnu kupovinu te iste aktive (akcije). Drugim riječima, investitor zauzima kratku poziciju na opciju i dugu poziciju na rizičnu aktivu. Prodavajući *call* opciju, investitor očekuje da će doći do pada cijene vezane imovine, jer se cijena opcije smanjuje kada cijen vezane imovine opada. S druge strane, zauzimanjem duge pozicuje na vezanu imovinu, investitor očekuje da dođe do rasta njene cijene. Na ovakav način investitor dostiže tačku neutralne *delta* strategije i u mogućnosti je da se u potpunosti zaštiti od rizika promjene cijene rizične aktive. U nastavku ćemo dati odgovor na pitanje koliko jedinica rizične aktive (akcija) investitor mora posjedovati u svom portfoliju da bi zaštitio kratku poziciju koju zauzima na *call* opciju.

Pretpostavimo da se portfolio sastoji od određene količine rizične aktive S_t i kratke pozicije na *call* opciju čiju cijenu ćemo, u trenutku t, označiti sa $f(t, S_t)$. Vrijednost portfolija će iznositi:

$$V(t,S_t) = \alpha_t S_t - f(t,S_t) \tag{2.5}$$

U cilju postizanja *delta* neutralnog portfolija nameće nam se sljedeći uslov koji mora biti zadovoljen:

$$\partial_s V(t,s) = 0$$

Poštujući navedeni uslov, iz izraza (2.5) dobijamo vrijednost za parametra α_t:

$$\alpha_t = \partial_s f(t,s)$$

što je u literaturi poznato kao *delta strategija zaštite*, s obzirom na to da se $\partial_s f(t,s)$ obično naziva *delta*.

Parametar α_t nam ukazuje koliku količinu rizične imovine investitor mora kupiti (prodati) u okviru svog *delta*-zaštitnog portfolija. Ako parametar α_t ima pozitivnu vrijednost to znači da investitor ulaže u kupovinu rizične aktive, dok negativna vrijednost parametra α_t ukazuje na njenu prodaj. U slučaju da investitor želi zaštiti kratku poziciju na *call* opciju (ili dugu poziciju na *put* opciju) parametar α_t će se kretati u intervalu od 0 do 1, dok će prilikom zaštite duge pozicije na *call* opciju (ili kratke pozicije na *put* opciju) parametar α_t zauzimati vrijednost iz intervala od -1 do 0.

GAMMA

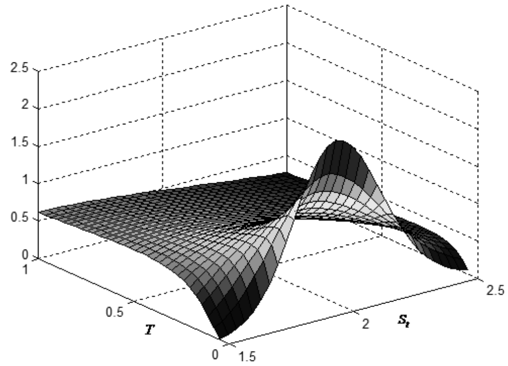
Gamma opcije pokazuje koliko će se promijeniti *delta* opcije ako se cijena aktive promijeni za 1 n.j. Matematički predstavlja drugi izvod cijene opcije ili prvi izvod *delta* opcije po cijeni vezane imovine (akcije). Vrijednost *gamma* za *call* i *put* opciju je uvijek pozitivna i njihova vrijednost je ista.

Za evropsku *call* i *put* opciju vrijednost *gamma* je:

$$\Gamma_C = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S_t} = \frac{\partial C}{\partial S_t^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \tag{3.1}$$

$$\Gamma_P = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S_t} = \frac{\partial P}{\partial S_t^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \tag{3.2}$$

Vrijednost *gamma* teži nuli kada se opcija nalazi izvan novca ili u novcu, dok svoje maksimalne vrijednosti dostiže kada je opcija na novcu i što je period dospijeća opcije kraći.



Grafik 2. Gamma evropske *call* i *put* opcije zasnovana na *Black-Scholes*-ovom modelu kao funkcija cijene vezane imovine $(1.5 \le S_t \le 2.5)$ i roka dospijeća $(0.05 \le T \le 1)$. Parametri su: izvršna cijena *K = 2,* volatilnost *σ = 0,4* i kamatna stopa *r = 0,05*.

Delta-gamma strategija zaštite

Pošto veza između cijene opcije i cijene vezane imovine nije linearna, *delta* neutralna strategija zaštite je korisna samo ukoliko su promjene u cijeni vezane imovine male. Za veće promjene cijene vezane imovine neophodno je koristiti *delta-gamma* strategiju zaštite.

Kratka ili duga pozicija koja se zauzima na vezanu imovinu u okviru *delta* strategije zaštite nije dovoljna da bi se portfolio u potpunosti zaštitio od promjene njene cijene, jer *gamma* takvog portoflija je jednaka nuli. Stoga je neophodno u takav portfolio uključiti neki finansijski derivat kao što je opcija, čija cijena nije linearno zavisna od cijene vezane imovine.

Pretpostavimo da investitor prodaje opciju $f(t, S_t)$ i želi da zaštiti kratku poziciju investiranjem u kupovinu rizične aktive (akcije) i u kupovinu nekog finansijskog derivata $g(t, S_t)$. Vrijednost portfolija će iznositi:

$$V(t, S_t) = -f(t, S_t) + \alpha_t S_t + \beta_t g(t, S_t) \tag{3.3}$$

U cilju postizanja imunizacije porfolija moraju biti zadovoljeni sljedeći uslovi:

$$\partial_s V(t, s) = 0 \, , \partial_{ss} V(t, s) = 0 \tag{3.4}$$

Poštujući navedene uslove, iz izraza (3.3) dobijamo sistem jednačina:

$$-\partial_s f + \alpha_t + \beta_t \partial_s g = 0$$
$$-\partial_{ss} f + \beta_t \partial_{ss} g = 0$$

Rješavajući navedeni sistem jednačina dobijamo vrijednosti za parametare α_t i β_t:

$$\beta_t = \frac{\partial_{ss} f(t, S_t)}{\partial_{ss} g(t, S_t)} \, , \qquad \alpha_t = \partial_s f(t, S_t) - \frac{\partial_{ss} f(t, S_t)}{\partial_{ss} g(t, S_t)} \partial_s g(t, S_t),$$

što je u liteaturi poznato kao *delta-gamma strategija zaštite* [Pascucci, 2011, p. 247].

THETA

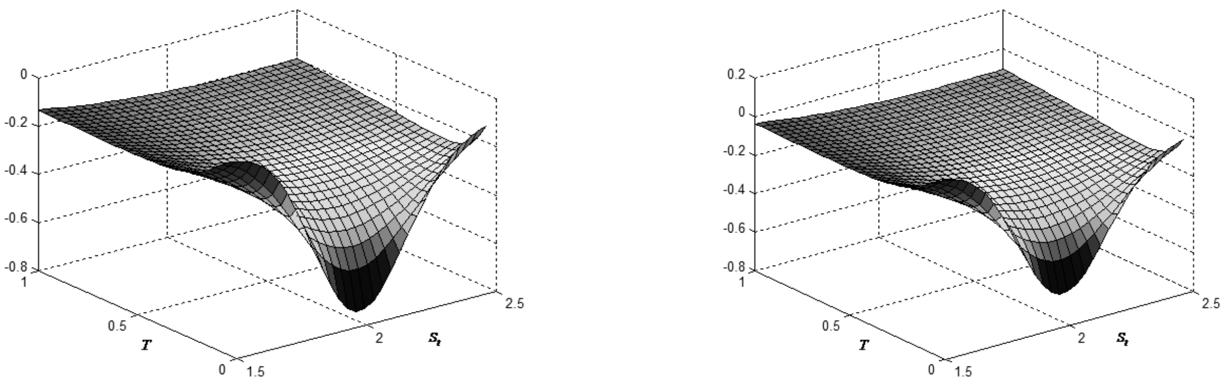
Theta predstavlja stopu opadanja vrijednosti opcije prouzrokovane protekom vremena, što se matematički može izraziti na sljedeći način:

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial (T-t)} \frac{\partial (T-t)}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial (T-t)}$$

Vrijednost *theta* za *call* opciju na akciju će iznositi:

$$\Theta_C = -\frac{\partial C_t}{\partial (T-t)} = -S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial (T-t)} + (-r)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) + Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial (T-t)} =$$
$$= -S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial (T-t)} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) + Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial (T-t)} =$$
$$= -S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left(\frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma (T-t)^{\frac{3}{2}}} \right) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) +$$
$$= -S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) = -\frac{\sigma S_t}{2\sqrt{T-t}}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{4.1}$$

Analogno, dobijamo vrijednost *theta* za put opciju:
$$\Theta_P = -\frac{\sigma S_t}{2\sqrt{T-t}}\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) \tag{4.2}$$



a) *b*)

Grafik 3. Theta evropske a) *call* i b) *put* opcije zasnovana na *Black-Scholes*-ovom modelu kao funkcija cijene vezane imovine $(1.5 \le S_t \le 2.5)$ i roka dospijeća $(0.05 \le T \le 1)$. Parametri su: izvršna cijena *K = 2*, volatilnost *σ = 0,4* i kamatna stopa *r = 0,05*.

Theta uvijek ima negativnu vrijednost za sve opcije na akcije koje ne obezbjeđuju isplatu dividende za vrijeme trajanja opcije. Za *theta* se ponekad koristi i termin vremensko propadanje vrijednosti opcije. Ukoliko su ostali parametri konstantni, opcija će gubiti na svojoj vrijednosti kako se njen rok dospijeća približava. Kada je cijena vezane imovine mala, odnosno kada je opcija van novca, *theta* teži nuli. Za opcije na novcu, *theta* ima veliku negativnu vrijednost. Kako cijena vezane imovine raste, *theta* teži isnosu $-rKe^{-r(T-t)}$.

Theta nema funkciju parametra zaštite porfolija, kod što je to slučaj sa *detla*, iz razloga što postoji neizvjesnost u pogledu budućeg kretanja cijene vezane imovine, dok u pogledu proteka vremena nema nikakve neizvjesnosti. Stoga je razumljivo da će investitor nastojati da se zaštiti od promjene cijene vezane imovine, ali ne i od uticaja proteka vremena na samu opciju.

Odnos između delta, theta i gamma

Prema *Black-Scholes*-ovoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini, vrijednost portfolija koji se sastoji od jedne opcije biće jednaka:
$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V_t}{\partial S} = rV_t$$
odnosno, ako uvrstimo da je $V_t = C_t$, dobijamo:
$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} = rC \tag{4.3}$$

Izraz (4.3) može se prikazati u funkciji faktora *delta*, *theta* i *gamma*, tako da se jasno uočava da između ova tri faktora postoji određena veza:

$$\Theta + rS_t\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \Gamma = rC_t \tag{4.4}$$

Za *delta* neutralni porfolio izraz (4.4) svodi se na:

$$rS_t\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \Gamma = rC_t$$

što pokazuje da su *gamma* i *theta* uvijek različitog predznaka. Kada je *theta* pozitivno, *gamma* će zauzimati negativne vrijednosti i obrnuto. To objašnjava zašto se *theta* često koristi u funkciji procjene vrijednosti faktora *gamma*.

VEGA

Do sada smo pretpostavili da je volatilnost vezane imovine (akcije) konstantna veličina. U praksi, volatilnost se vremenom mijenja. To bi značilo da je vrijednost finansijskog derivata osjetljiva na promjene volatilnosti, na isti način kao što je osjetljiva na primjenu cijene vezane imovine ili protek vremena [Hull, 2012, p. 393].

Vega kao mjera osjetljivosti cijene opcije u odnosu na promjenu volatilnosti vezane imovine matematički predstavlja prvi izvod cijene opcije po parametru volatilnosti.

$$\nu = \partial_\sigma f = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

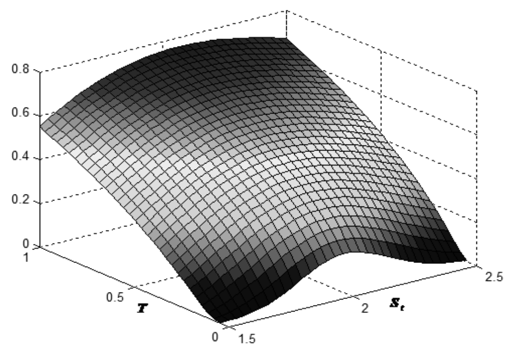
Za evropsku *call* opciju vrijednost vega je:

$$\nu_C = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} = S_t \frac{N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$
$$= S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left(\frac{\sigma^2 (T-t)^{\frac{3}{2}} - \left[\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]\sqrt{T-t}}{\sigma^2 (T-t)} \right)$$
$$- Ke^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{S_t}{K} e^{r(T-t)} \right) \cdot \left(\frac{-\left[\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]\sqrt{T-t}}{\sigma^2 (T-t)} \right) = S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{T-t} \tag{5.1}$$

Analogno, dobijamo vrijednost *vega* za evropsku *put* opciju:

$$\nu_P = S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{T-t} \tag{5.2}$$

Vega opcije je uvijek pozitivno i njena visoka apsolutna vrijednost ukazuju da je vrijednost portfolija jako osjetljiva na male promjene u volatilnosti. S druge strane, niska vrijednosta *vega* ukazuju da promjene volatilnosti nemaju veliki uticaj na vrijednost portfolija [Hull, 2012,393]. Vrijednost *vega* je mala ako se opcija nalazi daleko u ili izvan novca, dok je njena vrijednot maksimalna kad je opcija na novcu i što je rok dospijeća opcije dalji.



Grafik 4. Vega evropske *call* i *put* opcije zasnovana na *Black-Scholes*-ovom modelu kao funkcija cijene vezane imovine $(1.5 \le S_t \le 2.5)$ i roka dospijeća $(0.05 \le T \le 1)$. Parametri su: izvršna cijena $K = 2$, volatilnost $\sigma = 0,4$ i kamatna stopa $r = 0,05$

Delta-vega strategija zaštite

Slično kao i kod *delta-gamma* strategije zaštite polazi se od istog argumenta kako bi se portfolio zaštitio od promjene vrijednosti kao rezultat promjene parametra volatilnosti. Odnosno, da bi se postigla *delta-vega* zaštita portfolija potrebno je uključiti još jedan finansijski derivat čija cijena zavisi od cijene vezane imovine. Osnovna pretpostavka *Black-Scholes*-ovog modela je ta da je volatilnost konstantna veličina, tako da *delta-vega* strategija zaštite očigledno izlazi iz okvira samog modela [Pascucci, 2011, p. 247].

Razmotrićemo portfolio iz izraza (3.3) i uvešćemo uslove *delta* i *vega* neutrealnosti portfolija:

$\partial_s V = 0, \quad \partial_\sigma V = 0$

Poštujući navedene uslove, iz izraza (2.3) dobijamo sljedeći sistem jednačina:

$$-\partial_s f + \alpha_t + \beta_t \partial_s g = 0$$

$$-\partial_\sigma f + \alpha_t \partial_\sigma S_t + \beta_t \partial_\sigma g = 0$$

Uzimajući u obzir da je $\partial_\sigma S_t = S_t (W_t - \sigma t)$, rješavanjem prethodnog sistema jednačina lako se može doći do vrijednosti parametara α_t i β_t koji predstavljaju *delta-gamma* strategiju zaštite portfolija [Pascucci, 2011, p. 247].

Portfolio koji je *gamma* neutralan ne mora ujedno biti *vega* neutralna i obrnuto. Iz tog razloga, ako se u isto vrijeme želi postići *gamma* i *vega* neutralnost portfolija, potrebno je u takav portfolio uključiti još najmanje dva finansijska derivata čija cijena nije linearno zavisna od cijene vezane imovine [Kozubikova, 2005, p. 9].

RHO

Rho je jedan od faktora koji investitorima ukazuje na rizik portfolija prouzrokovan promjenom kamatne stope. Matematički predstavlja prvi izvod cijene opcije po kamatnoj stopi i može se izraziti na sljedeći način:

$$\rho = \partial_r f = \frac{\partial f}{\partial r}$$

Drugim riječima, *rho* je mjera osjetljivosti porfotlija na promjenu kamatne stope.

Vrijednost *rho* za evropsku *call* opciju će iznositi:

$$\rho_C = \frac{\partial C_t}{\partial r} = S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial r} + (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial r}$$

$$= S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{d_1}{\partial r} + (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - Ke^{-r(T-t)} \frac{N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial r}$$

$$= S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2 1}{2}} \left(\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) + (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - Ke^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{S_t}{K} e^{r(T-t)} \right) \left(\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} \right)$$

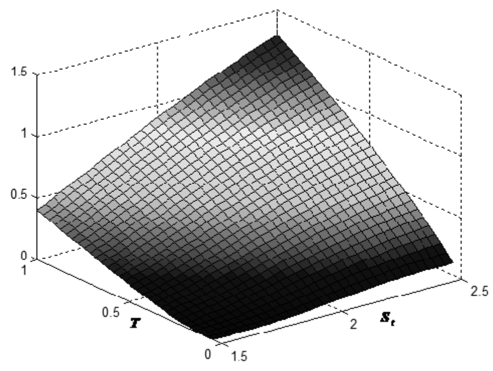
$$= (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{6.1}$$

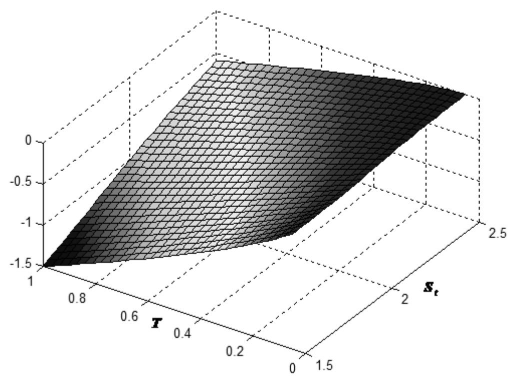
Analogno dobijamo vrijednost *rho* za evropsku *put* opciju:

$$\rho_P = -(T-t)Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) \tag{6.2}$$

Za evropsku *call* opciju *rho* je uvijek pozitivno, dok je za evropsku put opciju negativno, što se jasno može uočiti iz izraza (6.1) i (6.2). Iz toga se zaključuje da kako kamatna stopa raste, cijena *call* opcije takođe raste, dok cijena *put* opcije opada.

Rho, kao ni *theta*, ne koristi se kao parametar koji je u funkciji formiranja strategije zaštite portfolija, jer *Black-Scholes*-ov model podrazumijeva da je kamatna stopa konstantna veličina.





a) *b*)

Grafik 5. Rho evropske a) *call* i b) *put* opcije zasnovana na *Black-Scholes*-ovom modelu kao funkcija cijene vezane imovine $(1.5 \le S_t \le 2.5)$ i roka dospijeća $(0.05 \le T \le 1)$. Parametri su: izvršna cijena *K = 2*, volatilnost *σ = 0,4* i kamatna stopa *r = 0,05*

ZAKLJUČAK

"Grci" obezbjeđuju najbolji način da se izvrži analiza formule za vrednovanje finansijskih derivata, kao što je *Black-Scholes*-ova formula. Njihova značajnost je u tome što se koriste prilikom formiranja strategije zaštite portfolija. U praksi, delta zaštita velikog broja portfolija vrši se na dnevnoj osnovi, dok se vrijednosti za *vega* i *gamma* redovno prate i vodi se računa da one nisu velike, a vega i gamma strategije zaštite sprovode se onda kada je to neophodno. To iz razloga što mnogi investitori ne mogu sebi priuštiti da se izlažu visokim transakcionim troškovima zaštite koji bi portfolio strategiju učinili izrazito skupom. S druge strane, rho i thetha porftolija se samo redovno prate, ali oni nisu u funkciji parametara zaštite portfolija.

LITERATURA

[1] Black, F., Scholes, M. (1973). *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*, Journal of Political Economy, 81, 637-654.

[2] Hull, John C. (2012). *Options, Futures and Other Derivatives*, University of Toronto, Prentice Hall

[3] Kozubikova, Z. (2005). *"Option Price Sensitivity Factors and Hedging"*, Journal of Information, Control and Management Systems, Vol. 3, No. 1

[4] Pascucci, A. (2011). *PDE and Martignale Methods in Option Pricing*, Italy: Springer-Verlag.

[5] Neftci, Salih N. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Second Edition, Academic Press

[6] Urošević, B., Božović, M. (2009). *Operaciona istraživanja i kvantitativne metode investicija*, Ekonomski fakultet, Beogradu.